SÍNTESIS DE UN CONTROL ÓPTIMO

Kevin Ennis, Reinaldo Paganitts Llanes y Hugo Ryckeboer

Docente jubilado, IUEAN, Univ. Nac de la Matanza,
kevinennis@fibertel.com.ar, carlosfr@usa.net, h_ryckeboer@yahoo.com.ar

Resumen: Los textos dedicados al principio de optimalidad de Pontryagin ilustran casos en los cuales la síntesis del control hace recostar este contra la frontera. Se realiza con finalidad didáctica un caso de síntesis en la cual el control asume también valores intermedios. Se demuestran las propiedades que justifican el algoritmo empleado.

Palabras claves: Síntesis de control óptimo, Pontryagin.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las posibles causas de la baja utilización del teorema de optimalidad de Pontryagin reside en el hecho de que el teorema sólo provee condiciones necesarias pero no sintetiza directamente el control. Al no haber, fuera de los problemas lineales, una técnica general para sintetizar una solución, el mejor camino parece ser encontrar casos de síntesis ya hechos e inspirarse en ellos para lograr nuevos resultados.

Los textos, por ejemplo (Pontryagin *et al,*. 1962; Rautenberg y D'Attellis, 2004) ilustran algunos casos de síntesis, pero han elegido exclusivamente problemas con el control recostado contra la frontera y de una naturaleza tal que la solución es expresable por trozos con funciones matemáticas sencillas.

Además, en problemas reales pueden aparecer funciones descriptas por datos empíricos que hacen que la solución sólo se pueda encarar numéricamente. En este trabajo se presenta la solución a un problema en el cual el control óptimo usa valores extremos sólo en parte de la misma y se desarrolla un algoritmo numérico para sintetizar el control. Además se muestran las propiedades que permiten demostrar la unicidad de la solución y convergencia del algoritmo. Los autores piensan que con ello se podría enriquecer la bibliografía existente. El problema que presentan es una versión simplificada de un problema de ingeniería vial, resuelto por ellos, pero que admite equivalentes en términos eléctricos o mecánicos.

2. PROBLEMA A RESOLVER

Al diseñar un camino se debe decidir la altura de la calzada respecto del terreno natural. La diferencia tanto en más como en menos origina un costo adicional y éste es el que se trata de minimizar. Por otra parte la pendiente del camino debe mantenerse dentro de un intervalo. Siendo camino de dos manos este intervalo es simétrico respecto del cero.

Dato de este problema es el perfil longitudinal del terreno $z(x)$, descripta mediante una poligonal. La función a optimizar es $h(x)$, la altura del camino. Esta tiene la restricción $|dh/dx| < P$ y el costo de construcción surge de la integral de una función $C(z(x)-h(x))$. Como el objetivo de este trabajo es ilustrar las técnicas de resolución y estas no se complican con funciones más complejas, se tomará una función C aproximada y sencilla: el cuadrado de la diferencia. Las ecuaciones (1) a (3) expresan este problema.

Cuando una sola magnitud tiene restricciones conviene elegirla como variable de control y así tener un problema con restricciones en el control y no en las variables de fase.

$$\frac{dc}{dx} = p \qquad (1)$$

$$\int_a^b \ (\ c(x) - z(x) \ )^2 \ dx \qquad (2)$$

$$|p| \leq P \qquad (3)$$

Un problema isomorfo a este es inyectar con una fuente de corriente controlada, una determinada forma de señal de tensión en un circuito de reactancia capacitiva. Una fuente tendrá inevitablemente valores extremos con lo cual a veces no podrá reproducir fielmente y habrá que penalizar la diferencia entre la señal lograda y la deseada lo cual podría ser con el cuadrado del error. Esto quedaría expresado en las ecuaciones (1') a (3').

$$\frac{dv}{dt} = \frac{i}{C} \qquad (1')$$

$$\int_a^b \ (\ v(t) - m(t) \ )^2 \ dt \qquad (2')$$

$$|i| \leq I \qquad (3')$$

El énfasis de este artículo no está tanto en la modelización de un servomecanismo concreto sino en la técnica de síntesis del control óptimo. Por conveniencia didáctica estas ecuaciones se pasarán a la notación propia del texto original de Pontryagin (1965).

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad (1'')$$

$$\int_a^b \ (\ x(t) - z(t) \ )^2 \ dt \qquad (2'')$$

$$|u| \leq U \qquad (3'')$$

Un problema completamente especificado debe indicar el valor en los extremos del intervalo en el cual se debe encontrar el control, o la condición de extremo libre. Esto introduce 4 variantes. Si la función a imitar es suficientemente suave en los extremos inevitablemente la solución coincidirá con ella y la distinción puede postergarse hasta después de explicar la estrategia común a todas las soluciones.

3. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Se comienza con la deducción de las condiciones necesarias de la solución las que serán invocadas en la parte algorítmica que resuelve el problema.

3.1 Condiciones necesarias aportados por el principio de optimalidad de Pontryagin.

Pontryagin transforma estos problemas en uno de maximizar una función escalar $\mathcal{H}$ para lo cual primero agrega una dimensión 0 que representa el funcional y cuya derivada es consecuentemente el integrando. Aplicado a este problema queda un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx_0}{dt} = (\ x_1(t) - z(t) \ )^2 \qquad (4)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = u \qquad (5)$$

Que puede expresarse en forma vectorial:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f} \qquad (6)$$

Siendo

$$\mathbf{f} = [\ (\ x_1(t) - z(t) \ )^2, \ u \ ] \qquad (7)$$

La función a maximizar es

$$\mathcal{H} = \langle \ \mathbf{f}, \mathbf{\Psi} \ \rangle = \Psi_0 \ (\ x_1(t) - z(t) \ )^2 + \Psi_1 \ u \ (8)$$

Siendo $\mathbf{\Psi}$ un vector de funciones auxiliares (variables de cofase), definido por un sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\frac{d\mathbf{\Psi}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} \qquad (9)$$

Aplicado a este problema da

$$\frac{d\mathbf{\Psi_0}}{dt} = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{d\mathbf{\Psi_1}}{dt} = -\psi_0 \ (\ x_1(t) - z(t) \ ) \qquad (11)$$

La integral de estas funciones auxiliares da:

$$\mathbf{\Psi_0}(t) = -1 \qquad (12)$$

$$\mathbf{\Psi_1}(t) = \int_{t_0}^{t} (\ x_1(\tau) - z(\tau) \ ) \ d\tau \quad (13)$$

Volviendo a la ecuación (8) que define $\mathcal{H}$ se ve que cuando Ψ_1(t) es positivo u(t) debe tomar su máximo valor, cuando Ψ_1(t) es negativo el mínimo valor y queda libre cuando Ψ_1 es nulo.

Para que Ψ_1(t) se mantenga en 0 es necesario que el integrando se mantenga en 0, o sea que la señal x(t) sea igual al modelo z(t) y u(t) tome el valor z'(t). Todo esto sólo es posible si esta derivada permanece en valor absoluto por debajo del tope U.

Si esto no es factible surge el problema computacional de decidir en que punto t_0 conviene que x(t) se aparte de z(t) lo cual inevitablemente será con una pendiente extrema.

Colocar el punto t_0 en el lugar donde sea imposible copiar exactamente el modelo, o sea donde | z'(t) | = U, no es una buena decisión, en general, como ilustra el gráfico siguiente. Ψ_1 se hará negativo, u tomará el valor mínimo y salvo que hubiera una gran depresión posterior de z(t), x(t) se alejará cada vez más del modelo propuesto.

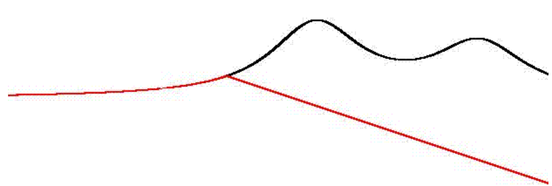

Fig. 1: Solución errónea (en rojo) que se aparta del modelo en el punto en el cual la pendiente lo supera

La solución correcta deberá localizar un punto precedente donde es oportuno apartarse prematuramente del modelo, de modo tal que luego de haber un área con un signo se cruce la función modelo y se genere una compensación de signo contrario.

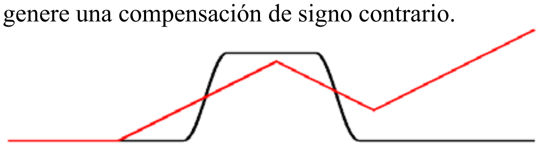

Fig. 2: Una solución errónea cercana a la óptima.

En la fig. 2, se muestran dos conmutaciones adicionales del control. Estos se producen cuando Ψ_1, que no es más que el área entre las curvas, cambia de signo. Este dibujo corresponde a un valor de t_0 prematuro.

3.2 Propiedad que fundamenta un algoritmo de búsqueda de una solución y la unicidad de esta.

Teorema: Si en un tiempo τ arbitario, una solución $x(t)$ que sigue las condiciones necesarias fijadas por el principio de optimalidad, adopta un valor superior al valor de otra, esta condición se conservará para todo $t > \tau$.

Esto surge del cumplimiento simultáneo de las siguientes propiedades, donde las dos integraciones que se comparan se distinguen con supraíndices:

$$\Delta x_1(t) = x_1^{(2)}(t) - x_1^{(1)}(t) > 0 \qquad (14)$$

$$\Delta \dot{x}_1(t) = \dot{x}_1^{(2)}(t) - \dot{x}_1^{(1)}(t) \geq 0 \qquad (15)$$

$$\Delta \psi_1(t) = \psi_1^{(2)}(t) - \psi_1^{(1)}(t) > 0 \qquad (16)$$

Existe una cadena circular de implicaciones entre estas 3 diferencias. La relación (15) no es más que la diferencia de los valores de control, de acuerdo a la ecuación (1”).

La desigualdad (14) es la integral de la (15), La (16) es la integral de la (14) y la (16) se puede separar en 5 casos que confirman a la (15):

- Si ambos valores de $\Psi_1(t)$ son positivos los dos controles $u(t)$ toman el valor máximo y la diferencia es nula.
- Si ambos valores de $\Psi_1(t)$ son negativos los dos controles $u(t)$ toman el valor mínimo y la diferencia es nula.
- Si $\Psi_1^{(2)}(t)$ es positivo y $\Psi_1^{(1)}(t)$ es negativo la diferencia de los controles $u(t)$ es máxima.
- Si $\Psi_1^{(2)}(t)$ es nulo y $\Psi_1^{(1)}(t)$ debe ser negativo, uno es arbitrario no inferior al mínimo y el otro es mínimo.
- Si $\Psi_1^{(1)}(t)$ es nulo y $\Psi_1^{(2)}(t)$ debe ser positivo, uno es máximo y el otro es arbitrario pero inferior a este.

Finalmente la desigualdad inicial sólo se puede provocar si en un punto t_0, $\Psi_1(t_0) = 0$, lo que permite elegir el valor de control, el que elige $u(t) = z'(t)$ conserva la condición, con cualquier otro valor se pierde esta condición, lo que obliga a tomar un valor extremo, estableciéndose las desigualdades (14-16).

La fig. 3 ilustra varias integraciones que respetan las condiciones necesarias, dos de ellas con un t_0 prematuro y en rojo con un valor tardío.:

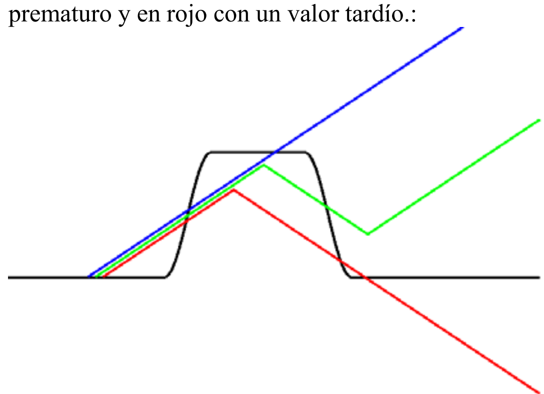

Fig. 3: Se muestran 3 integraciones con distinto t_0

3.3 Algoritmo que ubica los puntos de bifurcación.

1) Si la pendiente de la muestra $z(t)$ se mantiene dentro del rango permitido U el control será idéntico a dz/dt. De no ser así, tal como se ha señalado en el punto anterior, será necesario determinar los puntos t_0 donde el control toma un valor extremo apartando la solución de la muestra.

2) Se toma un punto t_0 arbitrario dentro de la zona donde el control era igual a la pendiente. Se hace $u(t_0+\varepsilon)$ igual a $+U$ y se computa $x(b)$ siguiendo las condiciones necesarias de optimalidad. Se presentan 3 posibilidades:

- $x(b) < 0$: Es necesario tomar la decisión con $+U$ en un punto anterior.
- $x(b) = 0$ Se encontró el punto y el sentido del apartamiento.
- $x(b) > 0$ Se necesita en $t_0+\varepsilon$ un valor más bajo, pero hay varias formas de lograrlo, para decidirlo se pasa al paso siguiente.

3) Se hace $u(t_0+\varepsilon)$ igual a $-U$ y se computa $x(b)$ siguiendo las condiciones necesarias de optimalidad. Se presentan 3 posibilidades:

- $x(b) > 0$: Es necesario tomar la decisión con $-U$ en un punto anterior.
- $x(b) = 0$ Se encontró el punto y el sentido del apartamiento.
- $x(b) < 0$ Esto unido al hecho de ser de ser $x(b) > 0$ con $+U$ indica que la solución debe estar entre ambos, lo que equivale a decir que el nuevo intento debe estar en un punto posterior.

En cada intento se integra a lo más dos veces las ecuaciones diferenciales y se elimina de no haber hallado la solución o el intervalo precedente a t_0 o el que le sigue. En esto coincide con el método de bisección (Burden y Faires, 1985). Una estrategia de mínimo máximo esfuerzo colocará cada vez a t_0 en la mitad del intervalo remanente de búsqueda.

Toda técnica basado en un algoritmo iterativo debe establecer un criterio de terminación basado en la precisión deseada.

3.4 Observaciones adicionales que afectan al método

Retorno a valores intermedios del control. En el planteo inicial se supuso que en los extremos del intervalo [a, b] la función modelo z(t) era suave, lo que permitía suponer que cerca de b x(t) y z(t) coinciden. De allí resulta que el algoritmo debe poder reconocer el punto de empalme, tal como ilustra la fig. 4

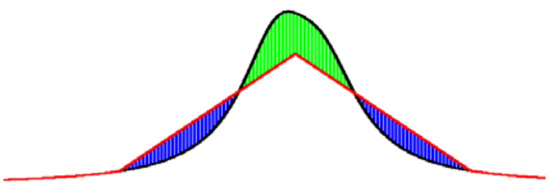

Fig. 4: Una solución que ilustra las áreas que se compensan

El punto de empalme se detecta por el hecho de anularse simultáneamente la diferencia x(t) – z(t) y Ψ_1(t). Como es habitual en toda técnica numérica hay una perturbación por los errores de redondeo del cálculo. Esto se remedia estableciendo un par de cotas que de ser satisfechas por ambos valores simultáneamente fuercen el retorno.

Falsos puntos de empalme. El hecho de haber logrado un punto de empalme (retorno a valores intermedios) no es garantía de haber sintetizado el control correcto. En un problema de múltiples “lomas” es factible que tras cruzar una de ellas y reunirse con la señal modelo sea imposible empezar desde este punto un control óptimo que cruce la siguiente loma respetando las condiciones de optimalidad. Es necesario entonces realizar el doble control suponiendo que el punto de llegada sea el t_0 de la loma siguiente, si la conclusión fuera trasladar t0 a valores menores el empalme es inválido. Las reglas dadas en 3.3 son aplicables aquí para retroceder el punto t_0 del cruce de la loma precedente.

Condiciones de transversalidad. Hasta aquí se ha eludido por no oscurecer la solución el problema de los extremos. Si uno de los extremos es libre, Ψ_1 debe anularse en ese extremo. Si x es fijo entonces Ψ_1 puede tomar cualquier valor en ese extremo.

Modificar el valor de Ψ_1 en el inicio equivale a modificar los tiempos en los cuales conmuta el control teniendo el mismo efecto práctico de ordenar las distintas integraciones, lo que permite establecer su valor con la misma técnica de bisección.

Si el valor de x fuera libre en el tiempo b, entonces los controles indicados en el algoritmo de 3.3 en lugar de referirse al valor x(b) se referirán a Ψ_1 (b).

Unicidad de la solución. Las propiedades de monotonía aseguran la unicidad de las soluciones.

4. CONCLUSIONES

Se ha mostrado como encarar la síntesis de un control óptimo en un problema no lineal cuyo control óptimo no toma siempre valores extremos y la importancia de poder demostrar propiedades de monotonía para desarrollar un algoritmo que sintetice el control óptimo.

REFERENCIAS

Burden R. L. y Faires J. D. (1985). *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko, E. F. (1965) *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience Publishers, 3th edition.

Rautenberg, C. N., D'Attellis, C. E., (2004) *Control Lineal Avanzado y Control Óptimo*, AADECA, Buenos Aires.